Examen Final

Nombre ____________________________

Hagan 5 de los primeros 8 problemas, y numeros 9 y 10.

1. Encuentra la descomposition LU (sin pivoteo) de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

2. a. Si una matriz se descompone en su parte subdiagonal, diagonal, y superdiagonal $A = L + D + U$, el metodo iterativa de Jacobi para resolver $Ax = b$ converge si y solo si los autovalores de que matriz son todos menores de 1 en valor absoluto?

   b. La misma pregunta, para Gauss-Seidel.

3. Dado que la descomposition QR de A es

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utiliza eso para encontrar el x que minimize $\|Ax - b\|_2$, donde $b = (2, -3, 4)$.

4. Encuentra la recta $f(x) = mx + b$ que mejor aproxima a los puntos $(0, -1), (2, 2), (3, 3), (5, 4)$ en el sentido de minimos cuadrados.

5. Entuentra todos los autovalores de la matriz seudo-triangular

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Encuentra una matriz ortogonal Q tal que QAQ^{-1} sea Hessenberg superior, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Si

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

   a. Haga una iteracion QR.

   b. Utiliza el metodo de potencias para encontrar el autovalor mas grande (en valor absoluto) de A, empezando con $x_0 = (2, 1)$. (Pista: los autovalores son numeros enteros.)

8. Una empresa produce biclicetas de uno, tres y diez velocidades. Los modelos necesitan 20, 30 y 40 unidades de acero, respectivamente, y 12,21 and 16 unidades de aluminio, y la empresa tiene disponible 91,800 unidades de acero y 42,000 unidades de aluminio. Cuantos de cada modelo deben producirse para maximizar las ganancias, si ganan \$8 por cada modelo de una velocidad, \$12 por los de tres y \$24 por los de diez velocidades? Cual es la ganancia optima entonces?

9. Cual es el "orden" de trabajo $O(N^\alpha)$ de los siguientes? Puede soponerse que cada matriz sea N por N y lleno, a menos que se declara otra cosa, y debe soponerse que se aprovecha cualquier estructura especial que se menciona.

   a. Una iteracion de Jacobi para encontrar autovalores de una matriz simetrica.

   b. Una iteracion Gauss-Seidel para $Ax = b$.

   c. Una iteracion QR, cuando A es Hessenberg superior.

   d. Una iteracion QR, cuando A es simetrica y tridiagonal.

   e. Una iteracion del metodo de potencias.

   f. El metodo de ecuaciones normales, para encontrar $min\|Ax - b\|_2$. Puede soponerse que A sea $2N$ por N.

   g. La resolution de $Ax = b$ utilizando eliminacion de Gauss con pivoteo parcial, si A es una matriz de banda, con ancho de banda $\sqrt{N}$.

   h. Sustitucion inversa, si A es como en la parte (g).

i. La transformacion ortogonal de una matriz llena a una matriz similar de forma Hessenberg superior.

j. La resolucion de $Ax = b$ si ya se tiene (y se usa) una descomposicion LU.

k. La resolucion de $min\|Ax - b\|_2$ si ya se tiene (y se usa) una descomposicion QR. Puede soponerse que A sea $2N$ por N.

l. Un paso del metodo Simplex, para resolver max $c^T x$ con $Ax \leq b, x \geq 0$.

10. Cierto o Falso

a. Es posible reducir una matrix simetrica general, 5 por 5, a forma diagonal en un numero finito de pasos, utilizando el algoritmo de Jacobi (para autovalores).

b. Si λ es el autovalor mas grande de $(A - pI)^{-1}$, entonces $p - \frac{1}{\lambda}$ es el autovalor de A mas cercana a p.

c. Si A tiene dominancia diagonal, tanto la iteracion Jacobi como la de Gauss-Seidel para resolver $Ax = b$ tiene convergencia guarantizada, por cualquier vector inicial.

d. Si $x = (A^T A)^{-1} A^T b$, entonces x es la solucion a min $\|Ax - b\|_2$, soponiendo que la inversa existe.

e. Si $x = A^T(AA^T)^{-1}b$, entonces x es la solucion a $Ax = b$ de minimo $\|x\|_2$, soponiendo que la inversa existe.

f. El metodo SOR tiene convergencia guarantizada, si A es simetrica y definido positivo, y $0 < \omega < 2$.

g. Si todos los autovalores tienen valores absolutos distinctos, la iteracion QR converge a forma triangular, aun empezando de una matrix llena.

h. El metodo Simplex siempre converge en menos que $3N$ pasos, donde N=numero de desconocidos, soponiendo que una solucion existe.